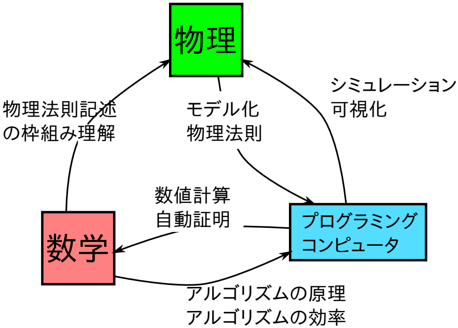
数学・物理をプログラミングで考える

田浦健次朗・山崎俊彦
TA 岩崎慎太郎 (4 年)・遠藤亘 (4 年)

ゼミのねらい

- 実際の問題を解くことを通して，プログラミングを学ぶ動機を高める
- その過程で必要な，数学・物理を知ることで，数学・物理を学ぶ動機を高める



ゼミのロードマップ

1. コンピュータで問題を解くって?
2. チャレンジ問題紹介
3. 道具 (Python プログラミング言語) の紹介
4. 道具の練習
5. チームの結成 (3 人一組)
6. 問題を解く，発展させる by チーム

コンピュータで問題を解くって?

コンピュータに得意な計算

- 具体的な数値を用いた，近似的な計算が得意
- 記号的な計算 (人間が普段やっている多くの計算) は苦手 (「難しいプログラミングが必要」)

例: 微分

$$f(x) = x^2\text{の微分}$$

- (記号微分) $f'(x) = 2x \Rightarrow$ 難しい
- (数値的な微分) $f'(3) \approx 6 \Rightarrow$ 易しい

$$f'(3) \approx \frac{f(3 + 0.0001) - f(3)}{0.0001} = 6.0001$$

$g(x) = e^{\sin x^{\sin x}} + \frac{\arcsin x}{x^3 - x^2 + 4x + 8}$ でも，数値的な微分なら同じくらい易しい

例: 積分

$$\int_2^3 \log x \, dx$$

- (記号積分)

$$\int_2^3 \log x \, dx = [x \log x - x]_2^3 = \ldots$$

  $\Rightarrow$ 難しい

- (数値積分) $x_i = 2 + i/100000$ として,

$$\int_2^3 \log x \, dx \approx \sum_{i=0}^{99999} \log x_i \, (x_{i+1} - x_i)$$

  $\Rightarrow$ 易しい

例: 運動方程式

空気抵抗 + バネの力の運動方程式:

$$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}(t) - x(t)$$

- (記号積分)

$$x(t) = \ldots \text{ なんだったっけ } \ldots$$

- (数値積分)

```
x = 初期状態の位置;
v = 初期状態の速度;
以下を繰り返す {
  加速度 = - v - x;
  v = v + 加速度 × 0.001;
  x = x + v × 0.001;
}
```

これが「常微分方程式を解く」基本

例: 確率

あるテニスの対戦では，各ポイントで，プレイヤー A, B がポイントを取る確率がそれぞれ 0.52, 0.48 である．A が 1 ゲーム (4 ポイント先取，3-3 になったら 2 ポイント差がつくまで) とる確率は?

- 乱数という便利な道具
- 1 ゲームのシミュレーション:

```
a = 0
b = 0
ゲームの決着がつくまで以下を繰り返す {
  if (乱数が0.52以下) a = a + 1
  else b = b + 1
}
```

- これを何度も何度も繰り返して，A がゲームを取る確率を求める

限界

- 計算に誤差がつきまとう
  - 最悪の場合，定性的に全く違う答えを出してしまうこともある
  - 原理的にそれが回避できないような系 (カオス) もある
- いくらコンピュータが速くても，たちまち計算時間が膨大になる
  - 1 次元の積分 100000 等分？
  - 2 次元の積分 100000 × 100000 等分？
  - 3 次元の積分 ...

同じ誤差で，より計算量の少ない計算法を考えるのは，知的・チャレンジング・数学や物理を学ぶ意欲を高める (と僕は思う)

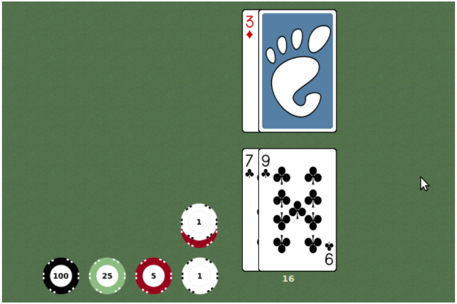
チャレンジ問題紹介

問題1 最大最小

- 空中で正四面体を様々な向きに配置する.
- 正四面体の真上から，平行光線で影を作る.
- 影の面積の最大，最小を求めよ.

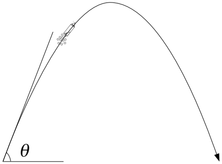
問題2 確率

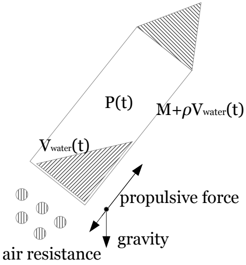
ブラックジャックの,「ヒット・ステイ」の正解を求める (すでにめくれているカードを考慮しない場合とする場合)



問題3 飛行距離

- ペットボトルロケットを遠くまで飛ばしたい
  - 容量 V、重さ M のペットボトルロケットに、水を V_{water} 入れる
  - 空き容量 $V - V_{water}$ に、ボトルの耐圧の限界 P まで空気を入れる
  - 傾ける角度 θ を決めて、打ち出す
  - 空気抵抗は速度に比例し、その係数を k とする
  - 最適な V_{water}、θ はいくつだろう？

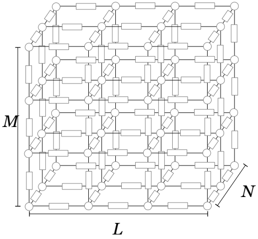


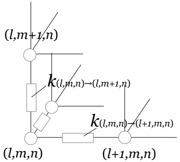


- ちなみに、
  - 単純な斜方投射は角度 45 度で飛距離最大
  - 実際のペットボトルロケットでは、50〜

問題4 耐震

- 低コストで、一定の大きさの地震に耐えられる構造物を作りたい
  - $L \times M \times N$ 個のグリッド（質量 $m_{l,m,n}$）が格子状に結ばれる構造物を想定
  - 格子部分は、バネ定数 $k_{(l,m,n)\to(l',m',n')}$ の建築資材で構成
  - 同じエネルギーを持つ、振動数が f_{min} から f_{max} の地震に耐えなければならない
  - バネ定数の合計 $\sum k$ が最小となる k は各々どのように与えればいいだろう？



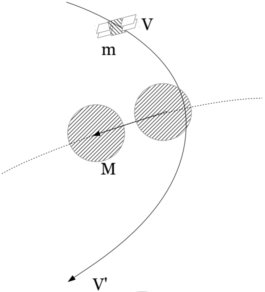


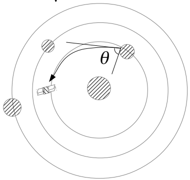
- ちなみに、
  - 一般に建築物は固有振動数を持ち、その振動数の揺れに弱い

問題5 探査衛星とスイングバイ

- 探査機を高速にして、太陽系外に打ち出したい
  - 質量 m の探査機を、地球から速度 V、発射角度 θ で打ち出す
  - プロジェクトの都合で、N 年以内には発射しなければならない
  - 太陽系の惑星をうまく使って、探査機の速度を最速にして打ち出したい
  - 最適な発射角度 θ はいくつで、いつ打ち上げよう？

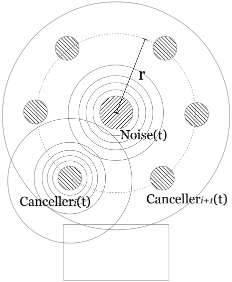
- ちなみに、
  - スイングバイは、天体の重力や運動を使い、軌道変更や加減速をすることを指す
  - 速度が十分でないと、太陽系外に出られ

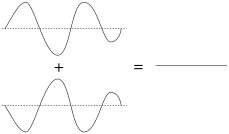




問題6 空間消音

- 位相を考慮した打ち消しにより、空間の騒音を低減したい
  - モデルとして、周期 T の既知の音を出す騒音スピーカーが中心にある場合を考える
  - 半径 r の円周上に、N 個の操作可能な消音スピーカーを用意する
  - 円周外のある空間で、外部から受け取る音のエネルギーの総和を最小にしたい
  - N 個の消音スピーカーからどのような音を出せばいいだろう？

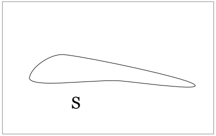


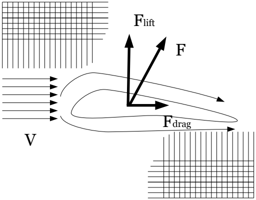


- ちなみに、
  - ノイズキャンセリングと同じ原理
  - 一般に空間の完全消音はできない

問題7 最適な翼の断面

- 飛行機の翼の断面を設計したい
  - 速度 V で水平方向に飛ぶ飛行機を考える
  - 内部が密で、断面積が S となる形状を考える
  - 空気の流体パラメータを与える
  - 水平方向に発生する力（抗力）F_{drag} を $F_{dragmax}$ 以下にすることを条件とする
  - 垂直方向に発生する力（揚力）F_{lift} が最も大きくなる形状はなんだろう？





- ちなみに、
  - 翼の設計は、解析計算が難しい問題の典型
  - それらしい形状が計算できたらすごい！